

## Capítulo 8

# Formas bilineales

### 8.1 Representación matricial

**Definición 8.1.1** Sea  $V$  un  $K$  espacio vectorial. Llamamos *forma bilineal sobre  $V$*  a toda aplicación

$$\varphi : V \times V \longrightarrow K$$

que sea lineal en las dos variables. Es decir,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in V, \forall \alpha \in K$ , debe verificar las siguientes propiedades:

- a)  $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ .
- b)  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$ .
- c)  $\varphi(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .
- d)  $\varphi(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

**Definición 8.1.2** Sea  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  una forma bilineal sobre  $V$  y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$ . Llamamos matriz de  $\varphi$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  a la matriz  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{M}(n \times n, K)$  definida por la igualdad

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) \\ \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \end{pmatrix} = (\varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)).$$

**Proposición 8.1.1** Sea  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  una forma bilineal sobre  $V$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$  y  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ . Se verifica que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} A (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t. \quad (8.1)$$

**Demostración** Sean  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{u}_j$  dos vectores de  $V$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \varphi \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi \left( \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} A (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t. \end{aligned}$$

**Definición 8.1.3** La ecuación 8.1, recibe el nombre de ecuación de  $\varphi$ , respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposición 8.1.2** (CAMBIO DE BASE). Si  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  es una forma bilineal sobre  $V$  y  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  bases de  $V$ , se verifica que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

**Demostración** La ecuaciones de  $\varphi$  respecto de las bases  $\mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B}$ , son:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) (\mathbf{y}_{\mathcal{B}'})^t, \quad (8.2)$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t. \quad (8.3)$$

Recordemos, por otra parte, las ecuaciones de un cambio de base,

$$(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) (\mathbf{x}_{\mathcal{B}'})^t, \quad (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) (\mathbf{y}_{\mathcal{B}'})^t.$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en 8.3, obtenemos que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}'} \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) (\mathbf{y}_{\mathcal{B}'})^t. \quad (8.4)$$

Igualando los segundos miembros de 8.2 y 8.4, se obtiene inmediatamente la proposición.

**Definición 8.1.4** Sean  $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ . Decimos que  $B$  es congruente con  $A$ , si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $B = P^t A P$ . Simbólicamente,

$$A \sim_c B \iff \exists P \in \text{Gl}(n, K) \mid B = P^t A P.$$

Resulta fácil demostrar que la relación de “congruencia” definida sobre  $\mathcal{M}(n \times n, K)$ , es de equivalencia.

**Corolario.** Si  $\varphi$  es una forma bilineal sobre  $V$ , las matrices de  $\varphi$  respecto de las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $V$ , son congruentes.

## 8.2 Formas bilineales simétricas

**Definición 8.2.1** Sea  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  una forma bilineal sobre  $V$ . Decimos que  $\varphi$  es simétrica si y sólo si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

**Proposición 8.2.1** Sea  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  una forma bilineal sobre  $V$ . Se tiene que

$\varphi$  es simétrica si y sólo si para toda base  $\mathcal{B}$  de  $V$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  es una matriz simétrica.

**Demostración** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base cualquiera de  $V$ .

$\Rightarrow$   $\varphi$  simétrica, implica que  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  luego, en particular,  $\varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \varphi(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i)$ , ( $1 \leq i, j \leq n$ ) lo que quiere decir que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$  es simétrica.

$\Leftarrow$  Si  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  es simétrica, será  $A = A^t$ . Por consiguiente:  
 $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} A (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t = (\mathbf{x}_{\mathcal{B}} A (\mathbf{y}_{\mathcal{B}})^t)^t = \mathbf{y}_{\mathcal{B}} A^t (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathbf{y}_{\mathcal{B}} A (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . De donde deducimos que  $\varphi$  es simétrica.

**Nota** Claramente, si  $\mathcal{B}$  es un base respecto de la cual  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  es simétrica y  $\mathcal{B}'$  es otra base cualquiera de  $V$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  es simétrica.

En efecto, como

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'),$$

o, más brevemente

$$B = P^t A P,$$

se tiene que

$$B^t = (P^t A P)^t = B = P^t A P = B,$$

luego  $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  es simétrica.

**Definición 8.2.2** Sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Diremos que los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son ortogonales si  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Si  $\mathbf{x}$  es ortogonal a  $\mathbf{y}$ , escribiremos  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

**Proposición 8.2.2** Sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ ,  $L$  una variedad lineal de  $V$  y  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  una base de  $L$ . Consideremos el siguiente subconjunto de  $V$ ,

$$L^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in L\}.$$

Se verifica que:

1.  $L^\perp$  es una variedad lineal de  $V$  llamada *variedad ortogonal* a  $L$ .
2.  $L^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_i, (i = 1, \dots, r)\}$ .
3. Unas ecuaciones implícitas de  $L^\perp$  vienen dadas por

$$L^\perp \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) A_{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0),$$

donde  $A_{\mathcal{B}}$  es la matriz de  $A$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

**Demostración**

1. Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L^\perp$  y  $\alpha \in K$ .

- Desde luego  $L^\perp \neq \emptyset$  ya que al menos  $\mathbf{0} \in L^\perp$ .
- $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L^\perp \implies \forall \mathbf{y} \in L, \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 0$ . Por consiguiente,  $\forall \mathbf{y} \in L, \varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 0 \implies \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in L^\perp$ .
- $\mathbf{x} \in L^\perp \implies \forall \mathbf{y} \in L, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \varphi(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \alpha \mathbf{x} \in L^\perp$ .

2.  $\boxed{\subset} \mathbf{x} \in L^\perp \implies \forall \mathbf{y} \in L, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0, (i = 1, \dots, r) \implies \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_i$ .

$$\boxed{\supset} \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_i \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0, (i = 1, \dots, r).$$

Sea ahora  $\mathbf{y} \in L$  e  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i$ . Se tiene que

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi\left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0 \implies \mathbf{x} \in L^\perp.$$

$$3. \mathbf{x} \in L^\perp \iff \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0, (i = 1, \dots, r) \iff \mathbf{x}_B \mathcal{M}_B(\varphi) ((\mathbf{v}_i)_B)^t = 0, (i = 1, \dots, r) \iff \mathbf{x}_B \mathcal{M}_B(\varphi) A_B = 0.$$

**Proposición 8.2.3** Sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ ,  $L$  una variedad lineal de  $V$  y  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  una base de  $L$  tal que

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 & \text{si } i \neq j, \\ \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = a_i \neq 0. \end{cases}$$

En estas condiciones, se verifica que

$$V = L \oplus L^\perp$$

**Demostración** Probaremos que  $L \cap L^\perp = \{\mathbf{0}\}$  y que  $V = L + L^\perp$ .

- $L \cap L^\perp = \{\mathbf{0}\}$ . En efecto,

$$\mathbf{x} \in L \cap L^\perp \implies \begin{cases} \mathbf{x} \in L \implies \mathbf{x} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j, \\ \mathbf{x} \in L^\perp \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, r). \end{cases}$$

Luego, para  $i = 1, \dots, r$ , se tendrá que

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\right) = 0 \implies \sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) = 0 \implies \alpha_i a_i = 0 \implies \alpha_i = 0$$

ya que, por hipótesis,  $a_i \neq 0$  y, por consiguiente,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

- Probemos ahora que  $V = L + L^\perp$ . Para ello, dado  $\mathbf{x} \in V$ , probaremos que existen dos vectores  $\mathbf{y} \in L$  y  $\mathbf{z} \in L^\perp$  tales que  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in L &\implies \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{z} \in L^\perp &\implies \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{v}_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

Queremos, además, que  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \implies \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Sustituyendo, obtendremos:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{v}_j) = 0 &\implies \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{v}_j) = 0 \implies \varphi\left(\mathbf{x} - \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) = 0 \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) - \varphi\left(\sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) = \\ 0 &\implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) - \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) - \beta_j a_j = 0 \implies \beta_j = a_j^{-1} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^r a_j^{-1} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

**Lema 8.2.1** Si  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$  y  $\varphi \neq 0$ , existe algún vector  $\mathbf{u} \in V$  tal que  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ .

**Demostración** Procedamos al absurdo. Supongamos que para todo  $\mathbf{u} \in V$ ,  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ .

$\forall \mathbf{u} \in V$ ,  $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \implies \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0 \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0 \implies \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies \varphi = 0$ , en contradicción con la hipótesis.

**Definición 8.2.3** Sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$  y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$ . Decimos que  $\mathcal{B}$  es una base ortogonal si  $\varphi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$  si  $i \neq j$ .

**Teorema 8.2.1** (CLASIFICACIÓN DE LAS FORMAS BILINEALES SIMÉTRICAS). Sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ . Existe una base ortogonal  $\mathcal{B}'$  de  $V$ , respecto de la cual  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  es diagonal.

**Demostración** Procederemos por inducción sobre  $n = \dim(V)$ .

- Para  $n = 1$  es evidente.

- Supongamos el teorema cierto para toda variedad de  $V$  de dimensión  $n - 1$ .

- Prueba para  $n$ .

Si  $\varphi = 0$ , no hay nada que demostrar puesto que la matriz de  $\varphi$  sería cero respecto de cualquier base de  $V$  y, por tanto, diagonal.

Sea pues  $\varphi \neq 0$ . De conformidad con el lema 8.2.1,  $\exists \mathbf{v}_1 \in V \mid \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = d_1 \neq 0$ . Sea  $L_1 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$  y  $L_1^\perp$  la variedad ortogonal a  $L_1$ . Sabemos (proposición 8.2.3) que  $V = L_1 \oplus L_1^\perp$  y que, por tanto,  $\dim(L_1^\perp) = n - 1$ . Sea  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base de  $L_1^\perp$ .  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\} \cup \mathcal{B}_1$  es pues una base de  $V$ . Además, la matriz de  $\varphi$  respecto de  $\mathcal{B}$  es de la forma

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c} d_1 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right) \quad \text{donde} \quad M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi|_{L_1^\perp}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2) & \dots & \varphi(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se deduce que  $\varphi_1 = \varphi|_{L_1^\perp}$  es una forma bilineal simétrica sobre  $L_1^\perp$  y como  $\dim(L_1^\perp) = n - 1$ , por la hipótesis de inducción, existe una base ortogonal  $\mathcal{B}'_1$  de  $L_1^\perp$ , respecto de la cual la matriz de  $\varphi_1$  es diagonal. Es claro que la base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1\} \cup \mathcal{B}'_1$  es una base ortogonal de  $V$  que verifica que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$  es diagonal.

**Corolario.** Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal.

En efecto, si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ , toda matriz simétrica  $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ , puede considerarse como la matriz, respecto de una cierta base, de una forma bilineal simétrica  $\varphi$ . Sea  $\mathcal{B}'$  la base de  $V$  respecto de la cual  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D$  es diagonal y sea  $P = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ . Aplicando la fórmula del cambio de base, se tiene:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Es decir,

$$D = P^t A P.$$

La matriz  $P$  recibe el nombre de *matriz de paso* a una forma diagonal de  $A$ .

**Definición 8.2.4** Sea  $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$  (donde  $K$  es uno de los cuerpos  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) una matriz diagonal. Llamamos *signatura* de  $A$  al número de elementos positivos de dicha diagonal. Este número será notado por  $\text{sig}(A)$ .

**Teorema 8.2.2** (TEOREMA DE SYLVESTER). Sean  $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$  dos matrices diagonales. Se verifica que

$$\text{si } K = \mathbb{Q}, \quad A \sim_c B \implies \begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(B), \\ \text{sig}(A) = \text{sig}(B). \end{cases}$$

y

$$\text{si } K = \mathbb{R}, \quad A \sim_c B \iff \begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(B), \\ \text{sig}(A) = \text{sig}(B). \end{cases}$$

**Demostración**

$\Rightarrow$  Sea  $K = \mathbb{Q}$  o  $K = \mathbb{Q}$ .

a)  $A \sim_c B \Rightarrow \exists P \in \text{Gl}(n, K) \mid B = P^t A P \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

b) Sea pues  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$ . Las matrices  $A$  y  $B$  serán de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_p & & & \\ & & a_{p+1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_r & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_{p'} & & & \\ & & b_{p'+1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & b_r & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos interpretar estas matrices como las matrices de una forma bilineal simétrica  $\varphi$ , respecto de las bases  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p'}, \mathbf{v}_{p'+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  (basta tomar  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de modo que  $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P$ ), así como convenir en que los elementos  $a_1, a_2, \dots, a_p$  y  $b_1, b_2, \dots, b_{p'}$  son todos los elementos estrictamente positivos de  $A$  y de  $B$ . Tenemos que probar, precisamente, que  $p = p'$ .

Para ello, consideremos en primer lugar las variedades lineales de  $V$

$$L = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \rangle$$

y

$$L' = \langle \mathbf{v}_{p'+1}, \dots, \mathbf{v}_r, \dots, \mathbf{v}_n \rangle.$$

Veamos que  $L \cap L' = \{\mathbf{0}\}$ . En efecto,

$$\mathbf{x} \in L \cap L' \Rightarrow \mathbf{x} \in L, \mathbf{x} \in L'$$

y, por tanto, las coordenadas de  $\mathbf{x}$  respecto de las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  serán de la forma

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0), \mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = (0, \dots, 0, \beta_{p'+1}, \dots, \beta_r, \dots, \beta_n).$$

Tomando como base, sucesivamente,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ , se tiene:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0)A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0)^t = \alpha_1^2 a_1 + \alpha_2^2 a_2 + \dots + \alpha_p^2 a_p \geq 0.$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (0, \dots, 0, \beta_{p'+1}, \dots, \beta_r, \dots, \beta_n)B(0, \dots, 0, \beta_{p'+1}, \dots, \beta_r, \dots, \beta_n)^t = \beta_{p'+1}^2 b_{p'+1} + \dots + \beta_r^2 b_r \leq 0.$$

Luego, para que se produzca la igualdad, habrá de ser  $\alpha_i = 0$  y  $\beta_i = 0$  con lo que  $\mathbf{x} = 0$ . Por consiguiente:

$$L + L' \subset V \implies \dim(L + L') = \dim(L) + \dim(L') \leq n \implies p + (n - p') \leq n \implies p \leq p'.$$

Tomemos ahora las variedades,

$$M = \langle \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$$

y

$$M' = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \rangle.$$

Repitiendo el razonamiento anterior llegaremos a que  $p' \leq p$  y, de ambos resultados, deducimos que

$$p = p' \implies \text{sig}(A) = \text{sig}(B).$$

$\Leftarrow$  Veamos que en el caso en que  $K = \mathbb{R}$ ,  $A \sim_c B$ . En efecto, consideremos las matrices diagonales:

$$P = \text{diag}(p_{ii}), (i = 1, \dots, n),$$

$$Q = \text{diag}(q_{ii}), (i = 1, \dots, n),$$

donde:

$$p_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i}} & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} & \text{si } p+1 \leq i \leq r \\ 1 & \text{si } i > r \end{cases}$$

$$q_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b_i}} & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ \frac{1}{\sqrt{|b_i|}} & \text{si } p+1 \leq i \leq r \\ 1 & \text{si } i > r \end{cases}$$

Es fácilmente comprobable que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = Q^t B Q,$$

d donde  $A \sim_c B$  por ser ambas congruentes con la misma matriz.

**Corolario.** Como consecuencia inmediata de los dos últimos teoremas podemos afirmar que si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , y  $\varphi$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$  tal que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ , existe una base  $\mathcal{B}_0$  de  $V$  respecto de la cual

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $p$  y  $q$  están unívocamente determinados por  $A$ .

Dicho de otro modo: toda matriz simétrica sobre  $\mathbb{R}$  es congruente con una matriz diagonal cuyos elementos son 1, -1, o 0 estando el número de estos, unívocamente determinados por la matriz dada.

**Ejemplo.** Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  una base de  $V$  y  $\varphi$  una forma bilineal sobre  $V$  cuya matriz respecto de  $\mathcal{B}$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular una base  $\mathcal{B}'$  respecto de la cual la matriz de  $\varphi$  sea diagonal.
2. Calcular una matriz diagonal  $S$ , con 1, -1 o 0 en dicha diagonal, que sea congruente a la matriz  $A$ , así como una matriz de paso  $Q$  de  $A$  a  $S$ .

**Solución.**

1. Como  $\varphi \neq 0$ , existe  $\mathbf{v}_1 \in V$  tal que  $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \neq 0$ . Si comenzamos probando con los vectores de la base dada, nos encontramos con que  $\varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) = 0$ .

- Tomemos, entonces, el vector  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ :

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = (1, 1, 1)A(1, 1, 1)^t = 6$$

Sea  $L_1 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \implies L_1^\perp \equiv (x, y, z)A(1, 1, 1)^t = 0 \implies L_1^\perp \equiv 3x + y + 2z = 0$ ,  
de donde obtenemos la base de  $L_1^\perp$ ,

$$\mathcal{B}_1 = \{(0, -2, 1), (1, -3, 0)\}.$$

- Tomemos  $\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0)$ :

$$\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = (1, -3, 0)A(1, -3, 0)^t = -6.$$



Sea  $L_2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \implies L_2^\perp \equiv (x, y, z)A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0)$ . Por tanto,

$$L_2^\perp \equiv \begin{cases} 3x + y + 2z & = 0 \\ -3x + y + 2z & = 0 \end{cases}$$

sistema que nos proporciona la base  $\mathcal{B}_2$  de  $L_2^\perp$ ,

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, -2, 1)\}.$$

- Tomando  $\mathbf{v}_3 = (0, -2, 1)$ , se tiene:

$$\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = (0, -2, 1)A(0, -2, 1)^t = 0.$$

Con esto el proceso ha terminado, siendo

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, -3, 0), (0, -2, 1)\},$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de paso  $P$  tal que  $D = P^t A P$  es aquella cuyas columnas son, respectivamente las coordenadas de los vectores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ , respecto de  $\mathcal{B}$ . Es decir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Procedamos ahora al cálculo de  $S$  y de  $Q$ .

- **Cálculo de  $S$**

Sea  $R$  la matriz de paso de  $D$  a  $S$  como esta matriz es

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de  $Q$**

Como quiera que

$$\left. \begin{array}{l} D = P^t A P \\ S = R^t D R \end{array} \right\} \implies S = (PR)^t A (PR)$$

y, por tanto,

$$Q = PR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 8.3 Espacios vectoriales euclídeos

**Nota** Hasta el final de la presente sección, supondremos que  $V$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales.

**Definición 8.3.1** Sea  $\varphi$  una forma bilineal sobre  $V$ . Decimos que  $\varphi$  es *definida positiva* si se verifica que

$$\forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$$

**Definición 8.3.2** Sea  $\varphi$  una forma bilineal sobre  $V$ . Diremos que  $\varphi$  es un *producto escalar* si es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

**Definición 8.3.3** Llamamos *espacio vectorial euclídeo* al par  $(V, \varphi)$ , donde:

- $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita (nosotros seguiremos suponiendo en lo que sigue que  $\dim(V) = n$ ).
- $\varphi$  es un producto escalar sobre  $V$ .

**Nota.** En lo sucesivo, si  $\varphi$  es un producto escalar, escribiremos  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$  y, en particular, si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  adoptaremos la notación  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}^2$ .

**Proposición 8.3.1** Sea  $\varphi : V \times V \longrightarrow K$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$ . Entonces,  $\varphi$  es un producto escalar si y sólo si existe una base ortogonal  $\mathcal{B}$  de  $V$  respecto de la cual  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  es diagonal con todos sus elementos estrictamente positivos.

**Demostración** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  y  $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

$\Rightarrow$  Si  $\varphi$  es un producto escalar sobre  $V$  se verificará que  $\forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ . Luego, en particular,  $\varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = d_i > 0$ .

$\Leftarrow$  Recíprocamente, sea  $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  con  $d_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y sea  $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$  cuyas coordenadas respecto de  $\mathcal{B}$  son  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Se tiene que

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)D(x_1, x_2, \dots, x_n)^t = x_1^2 d_1 + x_2^2 d_2 + \dots + x_n^2 d_n > 0,$$

luego  $\varphi$  es definida positiva ya que alguna de las coordenadas de  $\mathbf{x}$  es distinta de cero y, por tanto, es un producto escalar.

**Nota.** Si  $\mathcal{B}'$  es otra base respecto de la cual la matriz  $D'$  de  $\varphi$ , es diagonal, como  $D' \sim_c D$ , el teorema de Sylvester garantiza que  $D$  y  $D'$  tienen la misma signatura. Es decir, si los elementos de la diagonal de  $D$  son estrictamente positivos, los de  $D'$  serán, igualmente, estrictamente positivos. Luego, el hecho de que  $\varphi$  sea o no un producto escalar, es independiente de la base que diagonalice la matriz de dicha forma bilineal.

**Definición 8.3.4** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo y  $\mathbf{x} \in V$ . Llamamos *módulo* del vector  $\mathbf{x}$  al número real positivo definido por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^2}.$$

(Nótese que, por definición,  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^2$ ).

**Proposición 8.3.2** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo. Se verifica:

1.  $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V, |\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| |\mathbf{x}|$ .
3.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2$  (CAUCHY-SCHWARTZ).
4.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$  (DESIGUALDAD TRIANGULAR).

**Demostración**

1.  $\implies$  Supongamos que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .  
 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} > 0 \implies |\mathbf{x}| > 0$ , en contradicción con la hipótesis.  
 $\impliedby$   $\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 0 \implies |\mathbf{x}| = 0$ .
2.  $|\alpha \mathbf{x}| = \sqrt{(\alpha \mathbf{x}) \bullet (\alpha \mathbf{x})} = \sqrt{\alpha^2 (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})} = |\alpha| |\mathbf{x}|$ .
3. Caben dos casos:
  - $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  son linealmente dependientes. Sea, por ejemplo,  $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ . En tal caso,  
 $(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2 = (\mathbf{x} \bullet \lambda \mathbf{x})(\mathbf{x} \bullet \lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})(\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{x})(\lambda \mathbf{x} \bullet \lambda \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2$ .
  - $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  son linealmente independientes. En este caso,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  y, por consiguiente,  $(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})^2 > 0$ . Ahora bien,  
 $(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})^2 > 0 \implies \mathbf{y}^2 \lambda^2 + 2(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})\lambda + \mathbf{x}^2 > 0 \implies \Delta = 4(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2 - 4\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 < 0 \implies (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2 < \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2$ .

**Definición 8.3.5** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo y  $\mathbf{u} \in V$ . Decimos que  $\mathbf{u}$  es *unitario* si  $|\mathbf{u}| = 1$ .

**Nota** Claramente, siempre es posible construir un vector unitario. Si  $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ , se verifica que  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$  es un vector unitario.

**Definición 8.3.6** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$ .

1. Decimos que  $\mathcal{B}$  es una *base ortogonal* de  $V$  si sus vectores son dos a dos ortogonales. Es decir, si se verifica que  $\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = 0$  si  $i \neq j$ .
2. Decimos que  $\mathcal{B}$  es una *base ortonormal o métrica* si es una base ortogonal y compuesta por vectores unitarios. Es decir,

$$\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Lema 8.3.1** Si  $(V, \bullet)$  es un espacio vectorial euclídeo de dimensión  $n$  y  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es un subconjunto de  $n$  vectores no nulos de  $V$ , dos a dos ortogonales. Entonces,  $A$  es una base de  $V$ .

**Demostración** Bastará probar que  $A$  es un conjunto de vectores linealmente independientes. En efecto,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \implies (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) \bullet \mathbf{v}_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

y, por consiguiente,

$$\alpha_i (\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_i) = 0 \implies \alpha_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

de donde deducimos que  $A$  es linealmente independiente y, por tanto, una base de  $V$ .

**Teorema 8.3.1** (GRAM-SCHMIDT). *Todo espacio vectorial euclídeo tiene una base ortonormal.*

O bien, enunciando de modo más preciso: si  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base de  $V$ , se puede calcular a partir de ella una base ortonormal,  $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Además, la base que obtengamos, verificará que:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1) &= L(\mathbf{e}_1), \\ L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \\ \dots &\dots \dots \dots \\ L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

**Demostración** Procederemos en dos pasos.

1. **Construcción de una base ortogonal**  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ .

- Tomemos  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ .
- Tomemos  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \lambda_{12} \mathbf{v}_1$  con la condición de que  $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$ . Con lo cual, multiplicando escalarmente ambos miembros por  $\mathbf{v}_1$ , se tiene que

$$0 = \mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{v}_1 - \lambda_{12} \mathbf{v}_1^2 \implies \lambda_{12} = \frac{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^2}.$$

- Tomemos  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \lambda_{13} \mathbf{v}_1 - \lambda_{23} \mathbf{v}_2$  con la condición de que  $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_2$ . Con dichas condiciones, si multiplicamos escalarmente ambos miembros por  $\mathbf{v}_1$  y por  $\mathbf{v}_2$ , se tiene,

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_1 - \lambda_{13} \mathbf{v}_1^2 &\implies \lambda_{13} = \frac{\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^2}, \\ 0 = \mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_2 - \lambda_{23} \mathbf{v}_2^2 &\implies \lambda_{23} = \frac{\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^2}. \end{aligned}$$

- ... ..

- Supuesto que se han calculado  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ , tomaremos

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \lambda_{1n} \mathbf{v}_1 - \dots - \lambda_{n-1,n} \mathbf{v}_{n-1}$$

con la condición de que  $\mathbf{v}_n$  sea ortogonal a todos ellos. Multiplicando sucesivamente por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ , obtendremos,

$$0 = \mathbf{u}_n \bullet \mathbf{v}_i - \lambda_{in} \mathbf{v}_i^2 \implies \lambda_{in} = \frac{\mathbf{u}_n \bullet \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^2} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Así, el proceso de calcular la base ortogonal  $\mathcal{B}'$  habrá concluido puesto que, de conformidad con el lema, el conjunto de vectores  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ .

## 2. Construcción de la base ortonormal $\mathcal{C}$ .

Tomemos ahora

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|} \quad (i = 1, \dots, n).$$

La base  $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  así construida es, evidentemente, ortonormal.

Nótese que no puede ser, para algún  $i$ ,  $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  pues ello nos llevaría a que los vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i$  son linealmente dependientes.

Observemos, además, que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &= \lambda_{12}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{u}_3 &= \lambda_{13}\mathbf{v}_1 + \lambda_{23}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n &= \lambda_{1n}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n, \end{aligned}$$

igualdades de las que se deduce fácilmente la segunda parte del teorema.

**Corolario** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base del espacio vectorial euclídeo  $V$  y  $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base ortonormal de  $V$  obtenida aplicando a  $\mathcal{B}$  el algoritmo de Gram-Schmidt. Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  donde  $\mathbf{x}_C = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{y}_C = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Se tiene que

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

En efecto

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}_C \mathcal{M}_C(\varphi)(\mathbf{y}_C)^t = \mathbf{x}_C I_n (\mathbf{y}_C)^t = \mathbf{x}_C (\mathbf{y}_C)^t = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

donde  $I_n$  es la matriz unidad de orden  $n$ .

**Nota.** La matriz del cambio de base de  $\mathcal{B}$  respecto de  $\mathcal{B}'$  viene dada por

$$P = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n} \\ & 1 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n} \\ & & 1 & \dots & \lambda_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Obsérvese que esta matriz es triangular superior y que, por tanto, su determinante es igual a uno. Recuerdese también que la matriz  $P^{-1}$  es, igualmente, triangular superior con unos en la diagonal. Estas propiedades serán utilizadas en breve.

**Definición 8.3.7** Sea  $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ . Llamaremos menores diagonales de la matriz  $A$  a las submatrices de  $A$  definidas del siguiente modo:

$$A_1 = (a_{11}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Proposición 8.3.3** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  una forma bilineal simétrica sobre  $V$  y  $\mathcal{M}_B(\varphi) = A$ . Entonces,  $\varphi$  es un producto escalar si y sólo si

$$|A_i| > 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

donde  $A_i$  son los menores diagonales de la matriz  $A$ .

**Nota.** En los cálculos realizados para demostrar esta proposición, se han aplicado las siguientes propiedades, que conviene recordar:

1. Si  $A$  es una matriz simétrica, la fila  $i$ -ésima de  $A$  es igual a su columna  $i$ -ésima.
2. La suma de los productos de los elementos de una fila (columna) por los adjuntos de una paralela, es igual a cero. O bien, para filas,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} |A| & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

### Demostración

$\Rightarrow$  Sea  $\varphi$  un producto escalar sobre  $V$ ,  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  la base ortogonal obtenida aplicando a  $\mathcal{B}$  el algoritmo de Gram-Schmidt y sea  $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Se sabe, que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

O bien,

$$A = (P^{-1})^t D P^{-1},$$

donde  $P = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  es la matriz calculada en la igualdad 8.5.

Como  $P^{-1}$  es una matriz triangular superior,  $(P^{-1})^t$  será una matriz triangular inferior y, en ambos casos, con unos en la diagonal principal. Sea  $P^{-1} = Q$ . La igualdad anterior quedará de la forma,

$$A = Q^t D Q.$$

Sean ahora  $A_i$ ,  $Q_i$  y  $D_i$  los menores diagonales de las matrices  $A$ ,  $Q$  y  $D$ , respectivamente. No es difícil comprobar que, por la forma de las matrices  $Q$  y  $D$ , se verifica que

$$A_i = Q_i^t D_i Q_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por tanto,

$$|A_i| = |Q_i^t| |D_i| |Q_i|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Como  $|Q_i| = 1$ , se tiene que

$$|A_i| = |D_i| = \prod_{j=1}^i d_j > 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

ya que por ser  $\varphi$  un producto escalar es  $d_j = \varphi(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) > 0$  (Ver proposición 8.3.1).

$\Leftarrow$  Sea ahora  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  la matriz de  $\varphi$  respecto de una cierta base  $\mathcal{B}$  de  $V$  y supongamos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $A_i > 0$  donde  $A_i$  son los menores diagonales, en el sentido de la definición 8.3.7, de la matriz  $A$ . Vamos a probar que existe una base ortogonal  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $V$  respecto de la cual la matriz de  $\varphi$  es diagonal con todos sus elementos estrictamente positivos. Siendo esto así y teniendo en cuenta la proposición 8.3.1,  $\varphi$  sería un producto escalar. En efecto,

- Tomando

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

se tiene que

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = (1, 0, \dots, 0) A (1, 0, \dots, 0)^t = (a_{11}, \dots, a_{1n}) (1, 0, \dots, 0)^t = a_{11} = A_1 > 0.$$

- Sea  $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Notemos por  $A_{2,21}$  y  $A_{2,22}$  a los adjuntos, respectivamente, de los elementos de la segunda fila de  $A_2$  y tomemos

$$\mathbf{v}_2 = (A_{2,21}, A_{2,22}, 0, \dots, 0).$$

Calculando  $\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) &= (A_{2,21}, A_{2,22}, 0, \dots, 0)A(A_{2,21}, A_{2,22}, 0, \dots, 0)^t \\ &= (0, |A_2|, b_{32}, \dots, b_{n2})(A_{2,21}, A_{2,22}, 0, \dots, 0)^t \\ &= |A_2|a_{11} = |A_2||A_1| > 0. \end{aligned}$$

Además  $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$ . En efecto,

$$\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = (0, |A_2|, b_{32}, \dots, b_{n2})(1, 0, \dots, 0)^t = 0$$

- Antes de generalizar, repitamos el razonamiento calculando  $\mathbf{v}_3$ .

Sea  $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  y sean  $A_{3,31}$ ,  $A_{3,32}$  y  $A_{3,33}$  los adjuntos de la tercera fila de  $A_3$ .

Si tomamos

$$\mathbf{v}_3 = (A_{3,31}, A_{3,32}, A_{3,33}, 0, \dots, 0),$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3) &= (A_{3,31}, A_{3,32}, A_{3,33}, 0, \dots, 0)A(A_{3,31}, A_{3,32}, A_{3,33}, 0, \dots, 0)^t \\ &= (0, 0, |A_3|, b_{43}, \dots, b_{n3})(A_{3,31}, A_{3,32}, A_{3,33}, 0, \dots, 0)^t \\ &= |A_3||A_2| > 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_2$ . En efecto,

$$\varphi(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (0, 0, |A_3|, b_{43}, \dots, b_{n3})(1, 0, \dots, 0)^t = 0$$

$$\varphi(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) = (0, 0, |A_3|, b_{43}, \dots, b_{n3})(A_{2,21}, A_{2,22}, 0, \dots, 0)^t = 0$$

- Procedamos en general.

Sea

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad (1 < s \leq n)$$

y sean

$$A_{s,s1}, A_{s,s2}, \dots, A_{s,ss},$$

los adjuntos de la última fila de  $A_s$ . Tomemos

$$\mathbf{v}_s = (A_{s,s1}, A_{s,s2}, \dots, A_{s,ss}, 0, \dots, 0).$$

Con esta elección, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s) &= (A_{s,s1}, A_{s,s2}, \dots, A_{s,ss}, 0, \dots, 0)A(A_{s,s1}, A_{s,s2}, \dots, A_{s,ss}, 0, \dots, 0)^t \\ &= (0, \dots, 0, |A_s|, b_{s+1,s}, \dots, b_{ns})(A_{s,s1}, A_{s,s2}, \dots, A_{s,ss}, 0, \dots, 0)^t \\ &= |A_s| |A_{s-1}| > 0\end{aligned}$$

Por otra parte,  $\mathbf{v}_s \perp \mathbf{v}_i$ , ( $i = 1, \dots, s-1$ ) ya que, si convenimos en que  $A_{1,11} = 1$  (recuérdese que se tomó  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ), para  $i = 1, \dots, s-1$  tendremos que

$$\varphi(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_i) = \overbrace{(0, \dots, 0, |A_s|, b_{s+1,s}, \dots, b_{ns})}^{(s-1)} \overbrace{(A_{i,i1}, A_{i,i2}, \dots, A_{i,ii}, 0, \dots, 0)}^{(i \leq s-1)} = 0.$$

**Proposición 8.3.4** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo y  $L$  una variedad lineal de  $V$ . Sea  $A\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$  una base de  $L$  y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_n\}$  una base de  $V$  obtenida prolongando la base  $A$  de  $L$ . Sea  $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base ortonormal de  $V$  obtenida aplicando a  $\mathcal{B}$  el algoritmo de Gram-Schmidt. En estas condiciones, se verifica:

- 1)  $L = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r)$ .
- 2)  $L^\perp = L(\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n)$ .

**Demostración** El aserto 1) es consecuencia inmediata del teorema de Gram-Schmidt ya que  $L = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r) = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r)$ .

En cuanto a la segunda parte de la proposición tenemos que probar que  $L(\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n) \subset L^\perp$  y recíprocamente.

$$\boxed{\subset} \quad \mathbf{x} \in L(\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_i = \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_i = 0, \quad (i = 1, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{x} \in L^\perp.$$

$$\boxed{\supset} \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \in L^\perp \Rightarrow \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_i = 0, \quad (\forall \mathbf{e}_i \in L) \Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_i = 0, \quad (i = 1, \dots, r) \Rightarrow x_i = 0, \quad (i = 1, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=r+1}^n x_j \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{x} \in L(\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n).$$

**Proposición 8.3.5** Sea  $(V, \bullet)$  un espacio vectorial euclídeo y  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$  variedades lineales de  $V$ . Se verifica:

- 1)  $V = L \oplus L^\perp$ .
- 2)  $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_2^\perp \subset L_1^\perp$ .
- 3)  $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$ .
- 4)  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$ .
- 5)  $(L^\perp)^\perp = L$ .

**Demostración**

1) Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y de la proposición (8.2.3).

Las propiedades 2), 3), 4) y 5) se demuestran de forma análoga a la proposición 4.3.10 relativa a las propiedades de la relación  $\omega$  en espacios duales.